Examen de Análisis Complejo

8 de junio de 1999

1. Supongamos que $-1 < \alpha < 3$. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{z^\alpha}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto
$$\{z\in\mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\, 0 < \arg(z) < \pi/2\}, \quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$
calcúlese la integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^4}\,dx.$$

2. Hállese el número de ceros del polinomio $3z^5 + iz^3 + z^2 - 1$
   a) En el anillo $A(0;1/2,1)$
   b) En el semiplano de la derecha.

3. Pruébese que el conjunto:
$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{H}(D(0,1)) : f(0) = 0,\ |\operatorname{Im} f(z)| < \pi/2\ \ \forall z \in D(0,1) \right\}$$
es compacto en el espacio $\mathcal{H}(D(0,1))$.

4. Sea f una función meromorfa en un disco punteado $\Omega = D(a,r) \setminus \{a\}$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los polos de f en Ω y supongamos que a es un punto de acumulación de $\mathcal{P}$. Pruébese que el conjunto $f(\Omega \setminus \mathcal{P})$ es denso en $\mathbb{C}$.